4.4 特征函数

在介绍特征函数之前，先介绍一下复随机变量。

设为两个随机变量，称为复随机变量。的共轭随机变量为，的模为，期望定义为。

与相互独立当且仅当与相互独立。

类似于实随机变量，若复随机变量相互独立，则



4.2.1 特征函数的定义

定义 设为随机变量，称



为的特征函数，或称为相应分布的特征函数。

由于，所以总是存在的。

若为离散随机变量，其分布列为，则的特征函数为

；

若为连续随机变量，其密度函数为，则的特征函数为

。

可见从到的变换就是傅里叶变换(一般的教科书上傅氏变换为).

例1 验证下列结论（1）两点分布的特征函数为;

(2) 二项分布的特征函数为;

（3）泊松分布的特征函数为

;

(4)均匀分布的特征函数为

;

(5)标准正态分布的的特征函数为

;

(6)指数分布的的特征函数为

.

解 (1) ;

(2) ;

(3) 





;

(4) ；

注意,它正是在时的极限.

(5) 

;

(6) 







.

4.4.2 特征函数的性质

下面不加证明地列举特征函数的性质

性质1 .

性质2 .

性质3 的特征函数为



性质4 独立随机变量之和的特征函数等于每个随机变量的特征函数之积,比如若与独立,则



性质5(特征函数与矩的关系) 若,则对,有



特别地 .

性质6(一致连续性) 特征函数在上一致连续.

性质7(非负定性) 特征函数是非负定的,即对于任意正整数及个任意实数,及任意个复数,有



性质8 (唯一性定理) 分布函数到特征函数的变换是一一对应的变换.

这一性质是如下逆转公式的推论:对任意的任意两个连续点,有

.

例2 设～,求的特征函数.

解:令,则的特征函数为



从而的特征函数为



例3 设～,求的特征函数。

解：令独立同分布于，则～，

从而的特征函数为



例4 证明泊松分布的可加性：设独立，且～，～，则～。

证明：，的特征函数分别为

，

由于独立，故的特征函数为

,

而此特征函数正是泊松分布的特征函数，所以

～。

下面定理将在中心极限定理一节中得到应用。

定理 设分布函数的特征函数为（，分布函数的特征函数为，则弱收敛于的充要条件是收敛于。

4.4.3 多维随机变量的特征函数

定义定义 设为维随机向量，称元实变量的复值函数



为的特征函数，或称为相应分布的特征函数。

由于，所以总是存在的。

若为离散型随机向量，其分布律为，则的特征函数为

,

若为连续型随机变量，其密度函数为，则的特征函数为

。

下面不加证明地列举特征函数的性质

性质1 ,,.

性质2 设的特征函数为,又设为的实矩阵, 为维列向量,则的特征函数为

,

其中为维实变量.特别地,若取,,则的特征函数为

.

性质3 在上一致连续,且存在,则

.

性质4设的特征函数为,则维随机向量(的特征函数为



性质5 设随机变量的特征函数为(),随机向量的特征函数为,则相互独立的充要条件为

.

性质6 (唯一性定理) 分布函数到特征函数的变换是一一对应的变换.

4.4.4 (唯一性定理) 分布函数到特征函数的变换是一一对应的变换.

4.4.4 维正态分布的性质

在上一节中,我们给出了维正态分布的定义. 维正态分布的概率密度为

,

其中，为阶正定矩阵.

在这里要求是非奇异矩阵,这种正态分布叫做非奇异正态分布.本小节先给出非奇异正态分布的特征函数,然后给出一般的正态分布(包括非奇异和奇异的正态分分)下定义.最后利用特征函数讨论多维正态分布的性质.

定理 设服从维正态分布,，为阶正定矩阵,则的特征函数为

.

记，，特征函数表示为

。

证明 本定理的证明分两步.

(1)考虑的情形. 那么,因此的特征函数为

.









(2)再考虑为正定矩阵.由线性代数的知识知，，其中为正交矩阵，，为的特征值。



对上面积分作换元，再利用，以及，得







在此特征函数中并不要求正定，是半正定阵时，也是一个特征函数。下面利用此特征函数给出一般的多维正态分布的定义。

定义 设是阶对称半正定矩阵，为维实向量，若随机向量的特征函数为



则称服从维正态分布，也称为维正态变量，记为。

当非奇异时，称为非奇异的正态分布，它有维密度函数。当奇异时，称为奇异的正态分布，它没有维密度函数。

利用特征函数与矩的关系易知，维正态分布的期望为，协方差阵为。

利用特征函数可得到维正态分布的重要性质。

定理 服从维正态分布的充要条件是的任意线性组合服从一维正态分布。其中是不全为0的任意实数.

证明 记，，，那么

，。

先证充分性，由于服从正态分布，故，从而的特征函数为

 （4.4.1）

的特征函数为

，

对比（4.4.1），在（4.4.1）中取，用替代使得

。

所以服从维正态分布。

再证必要性。

若，那么的特征函数为

，

因此的特征函数为



所以服从正态分布。

定理 设，为阶实矩阵，则

。

证明 的特征函数为



所以。

定理 设，则相互独立的充分必要条件是两两不相关，即为对角阵。

证明 必要性显然，下证充分性。

若为对角阵，那么的特征函数为

，

所以相互独立。

例 设～，令，

（1） 求的概率密度；

(2)与是否独立?

解: (1)



,

由正态分布的性质知 ～,

所以的概率密度为



(2) 

,

所以与不相关,由正态分布的性质知服从二维正态分布,故与相互独立.

例 设独立同分布，且～，，证明：

（1）与不独立；

（2）与独立。

证明：（1）



而，

，

同样，，

于是

，

由于，故与不独立。

（2），

由正态分布的性质知服从二维正态分布，再由正态分布的性质知与独立。